МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Астраханский государственный университет» (АГУ)

Ю.Ю. Тарасевич, И.А. Бубенщикова

Математические модели в естествознании и методы их исследования

Компьютерный практикум

Учебно-методическое пособие

Сорокин Роман Васильевич
Издатель

Астрахань — 2015

Т19
УДК 004.942(075)
ББК 22

Рекомендовано к изданию Учебно-методическим советом
ФГБОУ ВПО «Астраханский государственный университет»,
протокол № 7 от 21 мая 2015 г.

Рецензенты
Доктор технических наук, профессор М.В. Ульянов
Доктор физико-математических наук, доцент В.Г. Цибулин

Ю.Ю. Тарасевич, И.А. Бубенщикова
Т19 Математические модели в естествознании и методы их исследования. Компьютерный практикум. Учебно-методическое пособие. — Астрахань, Издатель: Сорокин Роман Васильевич , 2015. 72 с.

ISBN 978-5-91910-406-3

Учебно-методическое пособие предназначено для проведение лабораторных работ по дисциплине «Математические модели в естествознании и методы их исследования» для направления 010500.62 «Прикладная математика и информатика».

ББК 22

Содержание

Предисловие

Основное назначение компьютерного практикума — проведение лабораторных работ по дисциплине «Математические модели в естествознании и методы их исследования» для направления «Прикладная математика и информатика». Кроме того, практикум может быть полезен при проведении лабораторных занятий по теме «Математические модели естественных наук», входящей в различные дисциплины различных направлений. Перечень лабораторных работ в основном соответствует учебному пособию [31].

Цель компьютерного практикума заключается в том, чтобы обеспечить качественное проведение занятий по изучению раздела «Математические модели естественных наук» с применением ИКТ. Компьютерный практикум должен обеспечить решение следующих задач

- способствовать развитию у студентов самостоятельной познавательной деятельности,
- расширять представления студентов о моделировании как методе научного познания,
- знакомить студентов с использованием компьютера как средства познания и научно–исследовательской деятельности,
- развивать умение проводить сравнительный и комплексный анализ математических моделей.

Задания, предусмотренные в пособии, направлены на углубленное освоение студентами основных положений лекционного курса. Все лабораторные работы снабжены инструкциями по их выполнению. Вопросы к каждой лабораторной работе и тестовые задания позволяют студентам самостоятельно контролировать уровень освоения материала.

В целом учебно-методическое пособие по курсу «Математические модели в естествознании и методы их исследования» направлен на то, чтобы помочь студенту сознательно освоить основной объём лекционного материала и подготовиться к экзамену по данному курсу.

Учебно-методическое пособие предназначено для преподавателей и студентов вузов естественнонаучных и физико-математических направлений, прежде всего для студентов направления «Прикладная математика и информатика».

Общие требования

Общие вопросы к лабораторным работам

1. Что описывает модель?
2. Какие эффекты учитывает модель?
3. Какие предположения используются при построении модели?
4. Каков смысл переменных модели? Каков смысл параметров модели?
5. Каковы возможные направления модификации модели?
6. Какие режимы демонстрирует модель?

Для работ, связанных с изучением динамических систем на плоскости

Общие требования к уровню усвоения материала

В результате подготовки и выполнения работы студенты должны

1) знать уравнение (-я), описывающее (-ие) модель;
2) знать смысл переменных и параметров уравнения (-й);
3) знать влияние изменения параметров модели на её поведение;
4) уметь определять тип особых точек системы;
5) уметь описывать поведение системы по фазовому портрету;
6) уметь описывать поведение системы по графику зависимости.

Общие вопросы к лабораторным работам

1. Какие особые точки есть на фазовом портрете системы?
2. Каковы координаты особых точек?
3. Меняется ли тип особых точек при изменении параметров модели?
4. Каковы особые направления? Каковы асимптоты?
5. Есть ли на фазовом портрете изучаемой системы предельные циклы?
6. Возможны ли в рассматриваемой системе бифуркации? Если да, то при каких условиях?

Общие требования к оформлению отчета

Отчёт по работе должен содержать

1) фазовые портреты и графики зависимости в соответствии с заданием;
2) подробные выводы о поведении системы для каждого случая;
3) ответы на вопросы.

Лабораторная работа № 1

Ограниченный рост. Уравнение Ферхюльста

Цель работы. Провести компьютерный анализ динамики численности популяций при ограничении ресурсов на примере модели Ферхюльста.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [12, 28, 30, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Живые системы» — «Базовые модели математической биофизики» открыть страницу модели «Ограниченный рост. Уравнение Ферхюльста».
3. Провести исследование модели. Меняя начальное условие, получить различные режимы выхода на стационарное состояние для следующих случаев:
   - численность убывает,
   - численность остаётся постоянной,
   - численность возрастает без перегиба,
   - численность возрастает с перегибом.
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы.

(a) Какие процессы описываются логистическими уравнениями (в экономике, социологии, биологии)?

(b) Как называется кривая, отображающая на плоскости динамику изменения численности по уравнению Ферхюльста?

Лабораторная работа № 2

Модель нелинейного маятника

Цель работы. Изучение колебаний нелинейных систем на примере модели нелинейного маятника.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.
2. Уметь приводить уравнение, описывающее движение маятника, к безразмерному виду.
3. Уметь выводить уравнения движения маятника вблизи положения устойчивого равновесия, неустойчивого равновесия, с учётом сопротивления среды и строить соответствующие им фазовые портреты.
4. Уметь находить точное решение задачи о маятнике.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [6, 25, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Нелинейный маятник».
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) Исследовать систему без затухания ($\beta = 0$). Вводя различные начальные условия, получить фазовые траектории и зависимость координаты и скорости от времени для следующих случаев:
      - гармонические колебания;
      - нелинейные колебания;
      - движение вблизи сепаратрисы;
      - вращение.

   (b) Исследовать систему с малым затуханием. Вводя различные начальные условия, получить фазовые траектории и зависимость координаты и скорости от времени.

(c) Исследовать систему с большим затуханием. Вводя различные начальные условия, получить фазовые траектории и зависимость координаты и скорости от времени.

(d) Дополнительное задание: исследовать зависимость периода колебаний от амплитуды.

4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы:

   (a) Какие колебания математического маятника можно считать гармоническими?

   (b) Какие колебания называются нелинейными?

   (c) Что называется периодическими колебаниями и что называется периодом колебания?

   (d) Что такое сепаратриса?

   (e) В чем смысл приведения уравнения к безразмерному виду? Влияет ли приведение уравнения к безразмерному виду на качественное поведение модели?

Лабораторная работа № 3

Хищник–жертва

Цель работы. Провести компьютерный анализ динамики двух взаимодействующих популяций на примере модели Вольтерры–Лотки «Хищник–жертва».

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.
2. Знать какие принципиальные предположения привели к тому, что модель описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [8, 14, 28, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Хищник–жертва».
3. Провести исследование модели по следующему плану:

   (a) Исследовать классическую модель Вольтерры–Лотки ($\gamma_1 = 0$).

   - вводя различные начальные условия, построить фазовый портрет и зависимости размера популяций от времени;
   - исследовать, как изменение параметров модели влияет на динамику популяций.

   (b) Исследовать модифицированную модель Вольтерры–Лотки при различных значениях параметров: вводя различные начальные условия, построить фазовый портрет и зависимости размера популяций от времени.

   - $\gamma_1 > 0, \alpha_1\beta_2 - \gamma_1\alpha_2 < 0$,
   - $\gamma_1 > 0, \alpha_1\beta_2 - \gamma_1\alpha_2 > 0$.

   (c) Дополнительное задание: найти общий интеграл системы уравнений Вольтерры–Лотки.

4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы.
   (a) Перечислите достоинства и недостатки модели.
   (b) Какова будет динамика популяции жертв (в классической и модифицированной моделях), если все хищники исчезнут?
   (c) Какова будет динамика популяции хищников (в классической и модифицированной моделях), если все жертвы исчезнут?

Лабораторная работа № 4

Модель межвидовой конкуренции

Цель работы. Исследовать динамику развития конкурирующих популяций, потребляющих общий ресурс на примере модели межвидовой конкуренции.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [5, 8, 12, 27, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Межвидовая конкуренция».
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) Исследуйте поведение модели при различных значениях параметров, соответствующих всем четырём исходам конкурентной борьбы:
      - первая популяция выживает, вторая вымирает;
      - первая популяция вымирает, вторая выживает;
      - обе популяции сосуществуют;
      - в зависимости от начальных условий одна из популяций выживает, а другая вымирает.

   (b) Для каждого случая построить фазовый портрет и графики зависимости размера популяций от времени.
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе Ответить на общие вопросы на с. 6.

Лабораторная работа № 5

Симбиоз

Цель работы. Провести компьютерный анализ динамики численности двух популяций при наличии положительного взаимного влияния.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [18, 28, 30].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Живые системы» — «Динамика популяций» открыть страницу модели «Вольтерровские модели взаимодействия двух популяций».
3. Провести исследование модели при значениях параметров $b_{12} > 0$, $b_{21} > 0$ и $c_1c_2 > b_{12}b_{21}$.
4. Провести исследование модели при значениях параметров $b_{12} > 0$, $b_{21} > 0$ и $c_1c_2 < b_{12}b_{21}$.
5. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
6. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.

Лабораторная работа № 6

Модель Ван дер Поля

Цель работы. Провести компьютерный анализ автоколебаний на примере модели Ван дер Поля.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.
2. Уметь выводить уравнение Ван дер Поля.
3. Уметь приводить уравнение, описывающую модель, к безразмерному виду.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [25, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Модель Ван дер Поля».
3. Исследовать модель при различных значениях параметра μ. Исследовать случаи:
   - квазигармонических колебаний,
   - сильно несинусоидальных колебаний,
   - релаксационных колебаний.
4. Для каждого случая построить фазовый портрет и графики зависимости x и y от времени.
5. Вывести уравнение Ван дер Поля и привести его к безразмерному виду.
6. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
7. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы:
   (a) Что такое автоколебания?
   (b) Чем автоколебания принципиально отличаются от рассмотренных ранее (например, колебаний маятника)?
   (c) Что такое предельные циклы? Какие бывают предельные циклы?
   (d) Какой режим возбуждения колебаний называется жёстким (мягким)?

Дополнительное задание. При каком условии особая точка меняет тип (неустойчивый фокус — неустойчивый узел)?

Лабораторная работа № 7

Тримолекулярная модель («Брюсселятор»): точечная и распределённая

Цель работы. Провести исследование автоколебаний в системе химических реакций на примере тримолекулярной модели «Брюсселятор» (точечной и распределенной).

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [24, 16, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Точечная модель «Брюсселятор»».
3. Провести исследование модели: исследовать точечную модель при различных соотношениях между параметрами. Построить фазовый портрет и графики зависимости концентраций веществ от времени для двух случаев.
    - автоколебания;
    - затухающие колебания.
4. Из раздела «Живые системы» — «Пространственно–временная самоорганизация биологических систем» открыть страницу модели «Базовая модель «Брюсселятор»».
5. Провести исследование модели: исследовать распределённую модель при различных соотношениях между параметрами. Построить графики зависимости концентрации веществ от координаты для 2–3 моментов времени и соответствующий им вид реактора для случаев, когда в системе образуются и не образуются структуры.

6. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
7. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы.
   (a) Что описывают точечная и распределённая модели?
   (b) При каком условии в точечной модели особая точка меняет тип (неустойчивый фокус – неустойчивый узел и устойчивый фокус – устойчивый узел)?
   (c) При каких условиях в распределённой системе возможна самоорганизация?

Лабораторная работа № 8

Модель Холлинга–Теннера

Цель работы. Исследовать возникновение незатухающих колебаний на примере модели Холлинга–Теннера.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [31, 38].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Модель Холлинга–Теннера».
3. Провести исследование модели: исследовать модель при различных соотношениях между параметрами. Построить фазовый портрет и графики зависимости размера популяций от времени для двух случаев.
    - Автоколебания.
    - Затухающие колебания.
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительный вопрос: при каком условии особая точка меняет тип (неустойчивый фокус – неустойчивый узел и устойчивый фокус – устойчивый узел)?

Лабораторная работа № 9

Модель механической системы

Цель работы. Исследовать модель при различных значениях параметров.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [1, 31].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Модель механической системы».
3. Провести исследование модели: исследовать модель при различных значениях параметров

   - $\alpha = 0, \beta = 0$;
   - $\alpha = 0, \beta < 0$;
   - $\alpha = 0, \beta > 0$;
   - $\alpha > 0, \beta = 0$;
   - $\alpha > 0, \beta > 0$;
   - $\alpha > 0, \beta < 0$.

   Построить фазовый портрет и графики зависимости координаты и скорости от времени.
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.

Лабораторная работа № 10

Модели Рёсслера и Лоренца

Цель работы. Изучить свойства странных аттракторов на примере системы Рёсслера и Лоренца методом вычислительного эксперимента.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.
2. Знать определения детерминированного хаоса, аттрактора, странного аттрактора.
3. Знать типы аттракторов и уметь определять их на фазовом портрете.
4. Знать при каких условиях возникает хаотическое поведение системы.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [2, 20, 31, 37].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Модель Рёсслера».
3. Провести исследование модели по следующему плану.
   (a) Исследовать систему при различных значениях параметра μ. Построить фазовые портреты и графики зависимости величин от времени для регулярного и хаотического режима. С помощью мыши фазовый портрет может быть повернут; постарайтесь найти положение, когда фазовый портрет наиболее информативен.
   (b) Показать большую чувствительность к начальным условиям и наличие горизонта предсказуемости в хаотическом режиме.
   (c) Дополнительное задание: постарайтесь пронаблюдать удвоения периода при значениях параметра μ равном 3.5, 4.1, 4.18. Из-за наличия переходного режима на фазовом портрете

удвоение периода может быть плохо заметно; необходимо подобрать такие начальные условия, чтобы переходной режим занимал минимальное время.

4. Из раздела «Базовые модели» — «Дифференциальные модели» открыть страницу модели «Модель Лоренца».
5. Провести исследование модели по следующему плану.
   (a) Изменяя параметры модели, получить следующие режимы поведения системы:
   - стационарный;
   - периодические колебания;
   - хаотические колебания.

   (b) Построить фазовые портреты и графики зависимости величин от времени для регулярного и хаотического режима. С помощью мыши фазовый портрет может быть повернут; постарайтесь найти положение, когда фазовый портрет наиболее информативен.

   (c) Показать большую чувствительность к начальным условиям и наличие горизонта предсказуемости в хаотическом режиме.
6. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
7. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы:
   (a) Что такое аттрактор, странный аттрактор?
   (b) Поясните, что означают аттракторы разных типов: притягивающая точка, предельный цикл, странный аттрактор.
   (c) Можно ли утверждать, что, воздействуя на реальную систему, модель поведения которой в фазовом пространстве имеет аттракторы типа притягивающая точка и предельный цикл, после воздействия мы вернёмся к исходному её состоянию?
   (d) С развитием вычислительной техники создавалось впечатление, что, создав суперкомпьютер, можно точно промоделировать поведение любой системы. Зная, что данные, закладываемые в модель реальных процессов, никогда не бывают абсолютно точными, объясните, почему это принципиально невозможно в случае странного аттрактора.

Лабораторная работа № 11

Волны жизни

Цель работы. Провести компьютерный анализ динамики численности популяций при наличии диффузии на примере модели Фишера–Колмогорова–Петровского–Пискунова.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [22, 15, 34].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Живые системы» — «Динамика популяций» открыть страницу модели «Волны жизни».
3. Провести исследование модели для различных начальных условий при фиксированном значении параметра D, заданного преподавателем.
4. Сравнить свои результаты с результатами других студентов, выполнявших работу с иными значениями параметра D.
5. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
6. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.

Лабораторная работа № 12

Логистическое отображение

Цель работы. Изучить особенности эволюции биологической популяции на примере модели Ферхюльста методом вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.
2. Знать определение удвоения периода, свойства удвоения периода.
3. Знать смысл константы Фейгенбаума.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [2, 20, 31, 36, 37].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Живые системы» открыть страницу модели «Ограниченный рост. Уравнение Ферхюльста»; перевести переключатель в положение, соответствующее логистическому отображению.
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) Меняя параметр r, исследовать различные режимы поведения x_n при $n \to \infty$.
   (b) Найти значения параметра r, при которых происходит удвоение периода.
   (c) Определить значение параметра r, при котором система переходит в хаотический режим.
   (d) Оценить значение постоянной Фейгенбаума. Каков ее смысл?
4. Из раздела «Базовые модели» — «Отображения» открыть страницу модели «Логистическое отображение». Повторить исследования по плану п. 3.
5. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
6. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы:

    (a) Что такое удвоения периода?

    (b) В чем смысл константы Фейгенбаума?

    (c) Какую биологическую систему может описывать модель?

Отчёт по работе должен содержать графики для различных режимов:

1) выход на 0;
2) выход на константу;
3) 2^n-периодические режимы;
4) хаотический режим.

Лабораторная работа № 13

Игра «Жизнь»

Цель работы. Изучить принцип работы клеточного автомата «Игра «Жизнь» и исследовать различные формы «жизни» методом вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.
2. Знать определение клеточного автомата.
3. Знать особенности клеточных автоматов.
4. Знать правила клеточного автомата «Игра «Жизнь».
5. Знать и уметь строить начальные конфигурации «живых клеток» с разнообразной эволюцией.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [9, 31, 33].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Клеточные автоматы» открыть страницу модели «Игра «Жизнь»».
3. Провести исследование модели по следующему плану.
   (a) Исследуйте динамику заданных начальных конфигураций. Определите, к какой форме «жизни» приведет их эволюция.
   (b) Если используемая вами версия программы VLISS поддерживает создание конфигураций пользователя, создайте собственные конфигурации, демонстрирующие следующие варианты эволюции:
      - исчезают;
      - стабилизируются;
      - периодически меняются;
      - движутся;
      - генерируют новые объекты.

4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Что описывает модель?
2. Какими правилами описывается модель?
3. Что такое клеточный автомат? Какими особенностями обладают клеточные автоматы?
4. Приведите пример вымирающей конфигурации.
5. Приведите пример устойчивой конфигурации.
6. Из скольких клеток состоит минимальная устойчивая конфигурация?
7. Приведите пример периодически меняющейся конфигурации.
8. Приведите пример движущейся конфигурации.
9. Приведите пример конфигурации-генератора.

Лабораторная работа № 14

Модель Винера–Розенблюта

Цель работы. Изучить особенности волновых процессов в возбудимых средах, в том числе в ткани сердца, на примере клеточного автомата Винера–Розенблюта методом вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Требования к уровню усвоения материала

1. Знать определение клеточного автомата.
2. Знать особенности клеточных автоматов.
3. Знать правила перехода между состояниями модели.
4. Иметь представление о поведении модели при различных значениях переменных.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [7, 21, 31, 33].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Клеточные автоматы» открыть страницу модели «Модель Винера–Розенблюта».
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) Исследуйте динамику различных начальных конфигураций:
      - плоский фронт;
      - полуволна;
      - двойная полуволна;
      - круговая волна.

   (b) Исследуйте, как влияет изменение параметров модели на динамику системы.
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Что описывает модель?
2. Какими правилами описывается модель?
3. Какие структуры могут возникать в модели?
4. Что такое клеточный автомат? Какими особенностями обладают клеточные автоматы?

Лабораторная работа № 15

Модель Ва-Тор (Акватор)

Цель работы. Изучить особенности взаимодействия двух популяций живых организмов во времени и пространстве на примере модели Ва-Тор методом вычислительного эксперимента на ЭВМ.

Требования к уровню усвоения материала

1. Знать определение клеточного автомата.
2. Знать особенности клеточных автоматов.
3. Знать правила клеточного автомата Ва-Тор.
4. Знать смысл переменных и параметров модели.
5. Иметь представление о характере поведения модели.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [4, 10, 31, 33].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Базовые модели» — «Клеточные автоматы» открыть страницу модели «Модель Ва-Тор (Акватор)».
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) Исследуйте динамику популяций в зависимости от начальных условий и параметров модели.
   (b) При каких параметрах модели популяции рыб и акул будут сосуществовать на ареале?
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Что описывает модель?
2. Какими правилами описывается модель?
3. Каков смысл переменных и параметров модели?

4. Каковы недостатки модели?
5. Какие варианты динамики взаимодействия популяций могут возникать в модели?
6. В чем отличие и сходство моделей Ва-Тор и Вольтерры–Лотки?
7. В каком случае поведение модели Ва-Тор соответствует логистической кривой?
8. Почему на фазовом портрете кривые не являются гладкими?
9. Почему популяция акул при достаточном количестве пищи растет не безгранично?
10. Что такое клеточный автомат? Какими особенностями обладают клеточные автоматы?

Лабораторная работа № 16

Модель Изинга

Цель работы. Изучить особенности магнитных фазовых переходов на примере модели Изинга методом вычислительного эксперимента.

Требования к уровню усвоения материала

1. Знать физический смысл модели Изинга.
2. Знать основные формулы, характеризующие систему.
3. Знать определения ферромагнетика, антиферромагнетика.
4. Знать идею алгоритма Метрополиса.
5. Знать, с какими задачами связано применение модели Изинга.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [31, 33].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Физические модели» — «Модели фазовых переходов» открыть страницу модели «Модель Изинга».
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) Для фиксированного размера решётки постройте зависимости намагниченности, теплоемкости и магнитной восприимчивости от температуры для ферромагнетика. Оцените по полученным графикам температуру фазового перехода (температуру Кюри).
   (b) Для фиксированного размера решётки постройте зависимости намагниченности, теплоемкости и магнитной восприимчивости от температуры для антиферромагнетика. Оцените по полученным графикам температуру фазового перехода (температуру Нееля).
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Что описывает модель?
2. Каковы недостатки модели?
3. Какие вещества называются ферромагнетиками и антиферромагнетиками?
4. Что понимают под температурой Кюри и температурой Нееля?
5. Каким образом вычисляется энергия в модели Изинга?
6. Каким образом определяется намагниченность? Как определяется теплоемкость? Как вычисляется магнитная восприимчивость?
7. Изложите идею алгоритма Метрополиса.
8. В каких задачах применим алгоритм Метрополиса?

Лабораторная работа № 17

Перколяция узлов на квадратной решетке

Цель работы. Изучить основы теории перколяции на примере перколяции узлов на квадратной решётке методом вычислительного эксперимента.

Требования к уровню усвоения материала

1. Знать определения основных терминов, используемых в теории перколяции.
2. Знать какие вопросы рассматривает теория перколяции.
3. Знать наиболее распространённые задачи теории перколяции.
4. Знать какими показателями характеризуется перколяция и их характеристики.
5. Знать идею алгоритма Хошена–Копельмана.

Содержание работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [11, 31, 32, 35, 39].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Физические модели» — «Модели фазовых переходов» открыть страницу модели «Перколяция узлов на квадратной решётке».
3. Провести исследование модели по следующему плану:
   (a) При фиксированном значении размера решётки оцените порог перколяции, меняя долю заполнения решетки.
   (b) Дополнительное задание: проведя моделирование для решёток различного размера, оценить порог перколяции для бесконечной решётки с использованием скейлингового соотношения.
4. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
5. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Приведите примеры различных перколяционных задач.
2. Дайте определение основных терминов, используемых в теории перколяции.
3. Как ведут себя различные величины (средний приведённый размер кластера, мощность перколяционного кластера, корреляционная длина, радиус циркуляции). Запишите основные соотношения.
4. Изложите идею алгоритма Хошена–Копельмана.

Отчёт по работе должен содержать

1. График зависимости вероятности возникновения перколяционного кластера от доли заполнения решётки.
2. График зависимости приведённого среднего значения кластера от доли заполнения решётки.
3. Гистограммы распределения кластеров по размерам для случаев, когда доля заполнения решётки:
   - меньше порога перколяции;
   - близка к порогу перколяции;
   - выше порога перколяции.
4. Картинки заполнения решётки кластерами для тех же случаев.

Лабораторная работа № 18

Влияние запаздывания

Цель работы. Провести компьютерный анализ динамики численности популяций при наличии запаздывания на примере модели Хатчинсова–Райта.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [19, 17, 28, 30].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Живые системы» — «Динамика популяций» открыть страницу модели «Влияние запаздывания». В модели значение параметра r задаётся по умолчанию равным $\pi/2$ и не может быть изменено.
3. Провести исследование модели при фиксированном значении параметра K, заданного преподавателем. Выбрать предысторию $y(t) = \exp(-t^2)$ при $-\tau < t < 0$. Меняя величину запаздывания τ, получить различные режимы изменения численности популяции:
   - численность монотонно возрастает до стационарного значения,
   - численность, совершив затухающие колебания, выходит на постоянное значение,
   - численность совершает незатухающие колебания,
   - система теряет устойчивость.
4. Сравнить свои результаты с результатами других студентов, выполнявших работу с иными значениями параметра K.
5. Провести исследование модели, выбрать предысторию $y(t) = 1 + \cos(\pi t/\tau)$ при $-\tau < t < 0$.
6. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
7. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.
2. Ответить на дополнительные вопросы:
   (a) Каким диапазонам запаздывания соответствуют различные режимы поведения?
   (b) Зависят ли эти диапазоны от K?

Отчёт по работе должен содержать

1) графики зависимости численности популяции от времени для различных режимов в соответствии с заданием;
2) выводы о поведении системы для каждого случая;
3) ответы на вопросы.

Лабораторная работа № 19

Триггер Жакоба и Моно

Цель работы. Провести компьютерный анализ триггерной системы.

Требования к уровню усвоения материала

1. См. Общие требования на с. 6.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [26, 13, 28, 29].
2. Запустить программу VLISS из главного меню. Из раздела «Живые системы» — «Базовые модели математической биофизики» открыть страницу модели «Триггер Жакоба и Моно».
3. Провести исследование модели при значениях параметров $m = 1$, $L_1 = 3$ и $L_2 = 3$.
4. Провести исследование модели при значениях параметров $m = 2$, $L_1 < 2$ и $L_2 < 2$.
5. Провести исследование модели при значениях параметров $m = 2$, $L_1 > 2$ и $L_2 > 2$.
6. Ответить на вопросы к лабораторной работе.
7. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Ответить на общие вопросы на с. 6.

Отчёт по работе должен содержать для всех трёх случаев случаев

1) фазовые портреты и графики зависимости величин x_1 и x_2 от времени;
2) подробные выводы о поведении системы;
3) ответы на вопросы.

Лабораторная работа № 20

Машина катастроф Зимана

Цель работы. Провести исследование одной из катастроф с использованием компьютерной модели машины катастроф Зимана.

Требования к уровню усвоения материала

1) знать основные идеи теории катастроф;
2) уметь определять линию кратных корней;
3) иметь представление о классификации катастроф.

Порядок выполнения работы

1. Ознакомиться с теоретическим материалом [3, 23].
2. На сайте перейти в раздел «Виртуальные лаборатории» — «Нелинейные процессы (Java Applets)» — «Машина катастроф Зимана».
3. Перемещая с помощи мыши указатель, наблюдать за изменением состояния диска. Координаты указателя и положение (угол поворота) диска динамически отображаются под моделью.
4. Найти положения указателя, при которых положение диска изменяется скачком. Координаты указателя, соответствующие скачкообразному изменению положения диска, автоматически заносятся в таблицу справа от модели.
5. Получите линию кратных корней в виде $\diamondsuit$.
6. Найти координаты «клювов».
7. Оформить отчёт по результатам исследований.

Вопросы к лабораторной работе

1. Какие предположения используются при построении модели?
2. Какие величины являются переменными управления?
3. Какая величина является переменной состояния?
4. Как находится потенциальная энергия системы?

5. Что утверждает лемма Морса?
6. Совпадают ли экспериментально полученные значения координат «клювов» с теоретически предсказанными?
7. Что такое принцип максимального промедления?
8. Что такое гистерезис?
9. Какие бывают элементарные катастрофы? К какой из них относится катастрофа в изученной модели?

Отчёт по работе должен содержать

1) построенную в одном из специализированных пакетов на основе таблицы результатов компьютерного эксперимента линию кратных корней;
2) координаты «клювов»;
3) ответы на вопросы.

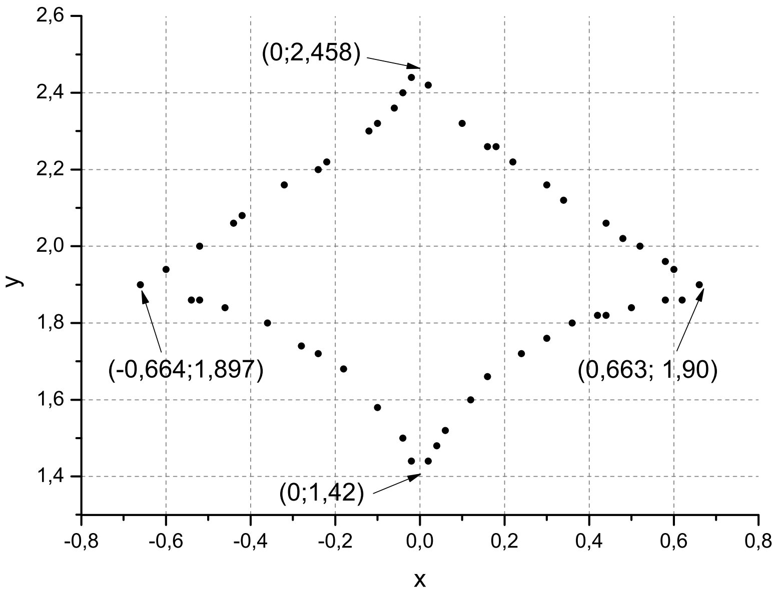


Рис. 20.1. Пример построенной в пакете Origin линии кратных корней

Вопросы для самоконтроля

1. Какие из перечисленных особых точек не могут быть аттракторами?

   а) узел; б) центр; в) фокус; г) седло.

2. Внутри устойчивого предельного цикла имеется одна особая точка. Эта особая точка —

   а) устойчивый фокус или устойчивый узел; б) неустойчивый фокус или неустойчивый узел; в) седло; г) центр; д) внутри устойчивого предельного цикла не может быть особой точки.

3. Внутри неустойчивого предельного цикла имеется одна особая точка. Эта особая точка —

   а) устойчивый фокус или устойчивый узел; б) неустойчивый фокус или неустойчивый узел; в) седло; г) центр; д) внутри устойчивого предельного цикла не может быть особой точки.

4. Какие из перечисленных характеристик и терминов не имеют отношения к автоколебаниям?

   а) обратная связь; б) автомодельность; в) нелинейный элемент; г) предельный цикл; д) размерность самоподобия.

5. Какие особые точки имеются в стандартной модели Вольтерры–Лотки?

   а) узел; б) центр; в) фокус; г) седло.

6. Какие особые точки ни при каком наборе параметров не возникают в модели межвидовой конкуренции?

   а) узел; б) центр; в) фокус; г) седло.

7. В каких из перечисленных моделей возможны бифуркации?

   а) модель Мальтуса; б) тримолекулярная модель; в) модель Холлинга–Тэннера; г) модель гармонического осциллятора; д) модель Вольтерры–Лотки.

8. Какие из перечисленных объектов не являются фрактальными?

   а) множество Кантора; б) ковер Серпинского; в) лемниската Бернулли; г) дерево; д) множество Мандельброта.

9. Какие из перечисленных характеристик и терминов не имеют отношения к фракталам?

а) самоподобие; б) непрерывност ; в) размерность Хаусдорфа–Безиковича; г) размерность самоподобия; д) предельный цикл.

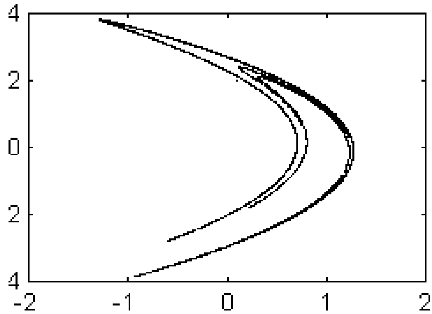
10. Какие из перечисленных терминов не относятся к динамическому хаосу?

    а) странный аттрактор; б) фрактальная размерность; в) удвоение периода; г) универсальность Фейгенбаума; д) синергетика.

11. Какие из перечисленных моделей не служат для описания химических превращений?

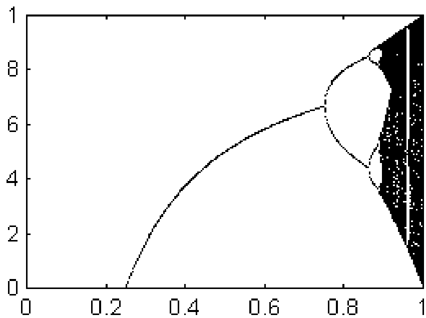
    а) модель Лотки; б) брюсселятор; в) модель Вольтерры–Лотки; г) модель Ван дер Поля; д) модель Ферхюльста.

12. На рисунке изображено



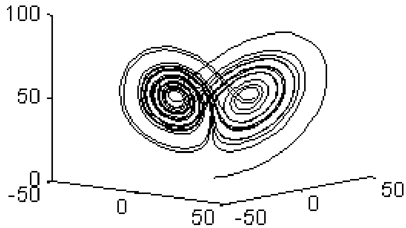
    а) аттрактор Лоренца; б) аттрактор Ресслера; в) фазовый портрет модели Винера–Розенблюта; г) логистическое отображение; д) отображение Энона.

13. На рисунке изображено



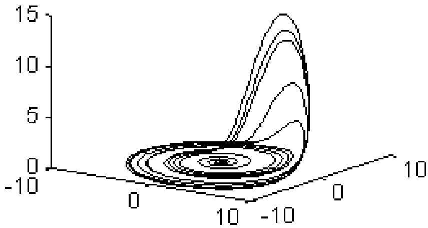
    а) аттрактор Лоренца; б) аттрактор Ресслера; в) фазовый портрет модели Винера–Розенблюта; г) логистическое отображение; д) отображение Энона.

14. На рисунке изображено



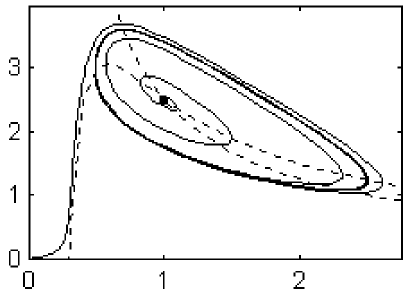
а) аттрактор Лоренца; б) аттрактор Ресслера; в) фазовый портрет модели Винера–Розенблюта; г) логистическое отображение; д) отображение Энона.

15. На рисунке изображено



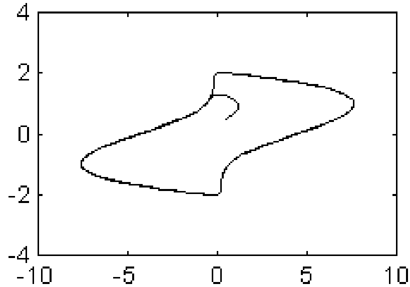
а) аттрактор Лоренца; б) аттрактор Ресслера; в) фазовый портрет модели Винера–Розенблюта; г) логистическое отображение; д) отображение Энона.

16. На рисунке изображен фазовый портрет



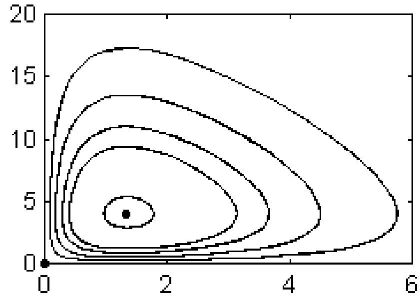
а) модифицированной модели Вольтерры–Лотки; б) модели Ван дер Поля; в) тримолекулярной модели (брюсселятора); г) модели Холлинга–Теннера; д) Модели Вольтерры–Лотки.

17. На рисунке изображен фазовый портрет



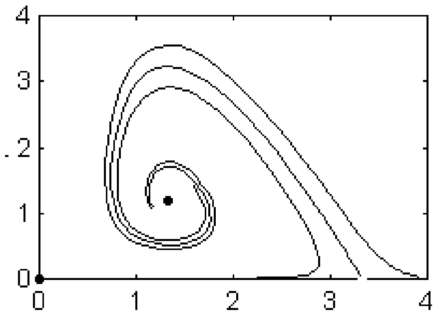
а) модифицированной модели Вольтерры–Лотки; б) модели Ван дер Поля; в) тримолекулярной модели (брюсселятора); г) модели Холлинга–Теннера; д) Модели Вольтерры–Лотки.

18. На рисунке изображен фазовый портрет



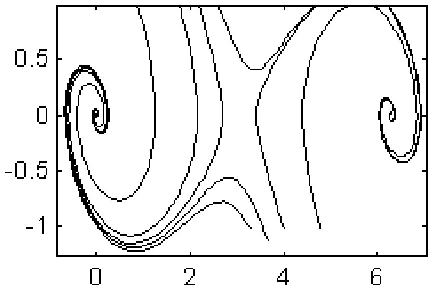
а) модифицированной модели Вольтерры–Лотки; б) модели Ван дер Поля; в) тримолекулярной модели (брюсселятора); г) модели Холлинга–Теннера; д) Модели Вольтерры–Лотки.

19. На рисунке изображен фазовый портрет



а) модифицированной модели Вольтерры–Лотки; б) модели Ван дер Поля; в) тримолекулярной модели (брюсселятора); г) модели Холлинга–Теннера; д) Модели Вольтерры–Лотки.

20. Какие из перечисленных особых точек имеются на данном фазовом портрете?



а) узел; б) центр; в) фокус; г) седло; д) предельный цикл.

21. Динамика численности некоторой популяции описывается уравнением $\dot{x} = x - x^2 - c$, где c — положительная константа, учитывающая влияние на популяцию человека (охота, рыбная ловля и т.п.).

При $c = 1/4$ численность популяции

а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) испытывает периодические колебания; г) стремится к значению 1; д) стремится к значению 1/4.

22. Динамика численности некоторой популяции описывается уравнением $\dot{x} = x - x^2 - c$, где c — положительная константа, учитывающая влияние на популяцию человека (охота, рыбная ловля и т.п.).

При $c = 1/2$ численность популяции

а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) испытывает периодические колебания; г) стремится к значению 1; д) стремится к значению 1/2.

23. Динамика численности некоторой популяции описывается уравнением $\dot{x} = x - x^2 - c$, где c — положительная константа, учитывающая влияние на популяцию человека (охота, рыбная ловля и т.п.).

При $c = 3/16$ и $x(0) = 1$ численность популяции

а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) стремится к значению 1/2; г) стремится к значению 3/4; д) стремится к значению 1/4.

24. Колебания маятника описываются уравнением $\varphi'' + 2\gamma\varphi' + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$.

Малым затуханиям соответствуют

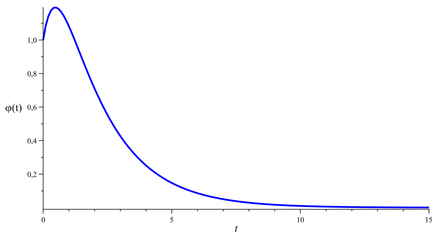
а) $\varphi(0) \approx 0$; б) $\gamma < 1$; в) $\gamma < \omega_0$; г) $\gamma^2 > \omega_0^2$; д) $\varphi'(0) \ll 1$.

25. Колебания маятника описываются уравнением $\varphi'' + \omega_0^2 \sin\varphi = 0$.

Движению по сепаратрисе соответствуют

а) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0$; б) $\varphi(0) = \pi, \varphi'(0) = 0$; в) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 2\omega_0$; г) $\omega_0^2 \ll 1$; д) $\omega = 0$.

26. Колебания маятника описываются уравнением $\varphi'' + 2\gamma\varphi' + \varphi = 0$.



Изображенной на рисунке ситуации соответствуют

а) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 0$; б) $\varphi(0) = \pi, \varphi'(0) = 0$; в) $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = \pi$; г) $\gamma < 1$; д) $\gamma > 1$.

27. Модифицированная модель Вольтерры–Лотки (модель хищник–жертва) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y - \varepsilon x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \end{cases}$$

где x — размер популяции жертв, y — размер популяции хищников, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ — положительные постоянные, причем $\alpha\delta > \varepsilon\gamma$.

Если начальная численность хищников равна 0, то численность жертв

а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) испытывает периодические колебания; г) стремится к значению $\frac{\alpha}{\varepsilon}$; д) стремится к значению $\frac{\gamma}{\delta}$.

28. Модифицированная модель Вольтерры–Лотки (модель хищник–жертва) описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y - \varepsilon x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x), \end{cases}$$

где x — размер популяции жертв, y — размер популяции хищников, $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ — положительные постоянные, причём $\alpha\delta > \varepsilon\gamma$.

Фокус на фазовом портрете имеет координаты

а) $(0, 0)$; б) $\left(\frac{\gamma}{\delta}, 0\right)$; в) $\left(\frac{\alpha}{\varepsilon}, 0\right)$; г) $\left(\frac{\gamma}{\delta}, \frac{\alpha\delta - \varepsilon\gamma}{\delta\beta}\right)$; д) фокус на фазовом портрете отсутствует.

29. В модели межвидовой конкуренции динамика численности видов определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 &= N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1). \end{aligned} \tag{20.1}$$

Здесь N_i — численность i-го вида, r_i, β_i, α_i — положительные коэффициенты.

Точка $(0, 0)$

а) не является особой; б) фокус; в) центр; г) седло; д) узел.

30. В модели межвидовой конкуренции динамика численности видов определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 &= N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1). \end{aligned} \tag{20.2}$$

Здесь N_i — численность i-го вида, r_i, β_i, α_i — положительные коэффициенты.

Если $N_1(0) = 0$, то численность второго вида

а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) испытывает периодические колебания; г) стремится к значению $\frac{r_2}{\beta_2}$; д) стремится к значению β_2^{-1}.

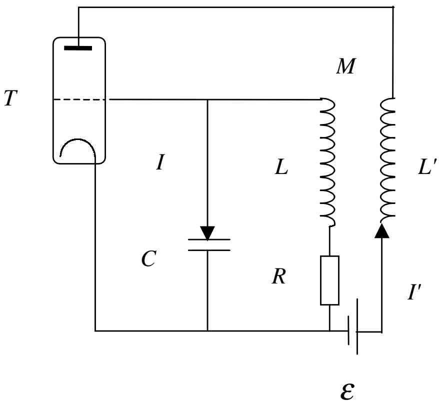
31. В модели межвидовой конкуренции динамика численности видов определяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{N}_1 &= N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 &= N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1). \end{aligned} \tag{20.3}$$

Здесь N_i — численность i-го вида, r_i, β_i, α_i — положительные коэффициенты.

Если $N_2(0) = 0$, то численность первого вида а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) испытывает периодические колебания; г) стремится к значению $\frac{r_1}{\beta_1}$; д) стремится к значению β_1^{-1}.

32. В изображенном на рисунке ламповом генераторе нелинейным элементом является



а) конденсатор; б) резистор; в) триод; г) катушка; д) колебательный контур.

33. Модель Ван дер Поля задаётся уравнением $\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0$.

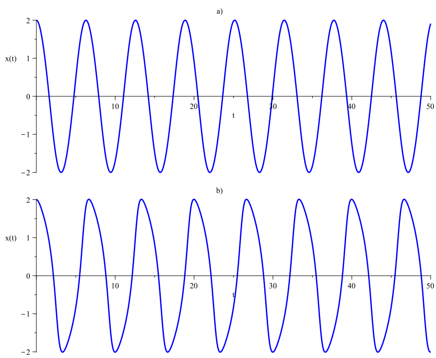
Особая точка на фазовом портрете имеет координаты

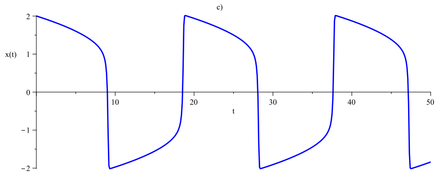
а) $(0, 0)$; б) $(0, \mu)$; в) $(\mu, 0)$; г) (μ, μ); д) $(-\mu, \mu^{-1})$.

34. Модель Ван дер Поля задаётся уравнением $\ddot{x} - \mu\left(1 - x^2\right)\dot{x} + x = 0$.

Особая точка из фокуса превращается в узел при условии

а) $x \to 0$; б) $\mu = 2$; в) $\mu < 1$; г) $\mu \ll 1$; д) $\mu^2 < 2$.

35. 



Релаксационным колебаниями соответствует

1) рисунок a); 2) рисунок b); 3) рисунок c); 4) все три рисунка; 5) ни один из рисунков.

36. Модель хищник–жертва Холлинга–Теннера описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right)x_1 - \dfrac{\omega x_1 x_2}{D + x_1}, \\ \dot{x}_2 = S\left(1 - \dfrac{J x_2}{x_1}\right)x_2, \end{cases}$$

где x_1 — размер популяции жертв, где x_2 — размер популяции хищников, D, K, J, S, ω — положительные постоянные.

Если начальная численность хищников равна 0, то численность жертв

а) неограниченно возрастает; б) стремится к нулю; в) стремится к значению J; г) стремится к значению r; д) стремится к значению K.

37. Модель хищник–жертва Холлинга–Теннера описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = r\left(1 - \dfrac{x_1}{K}\right)x_1 - \dfrac{\omega x_1 x_2}{D + x_1}, \\ \dot{x}_2 = S\left(1 - \dfrac{J x_2}{x_1}\right)x_2, \end{cases}$$

где x_1 — размер популяции жертв, где x_2 — размер популяции хищников, D, K, J, S, ω — положительные постоянные.

Точка $(K, 0)$

а) не является особой; б) фокус; в) центр; г) седло; д) узел.

38. Автоколебания в некоторой механической системе описываются уравнением Дуффинга $\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x^3(t) = 0$.

Особая точка на фазовом портрете этой динамической системы имеет координаты

а) $(0, 0)$; б) $(\alpha, 0)$; в) $(0, \alpha)$; г) $(\omega, \alpha\beta)$; д) особых точек нет.

39. Автоколебания в некоторой механической системе описываются уравнением Дуффинга $\ddot{x}(t) + \beta\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) + \alpha x^3(t) = 0$.

Особая точка на фазовом портрете этой динамической системы является узлом при

а) $\alpha = 0$; б) $\alpha < 0$; в) $\beta^2 < 4\omega_0^2$; г) $\beta^2 > 4\omega_0^2$; д) любых значениях параметров.

40. Тримолекулярная модель (брюсселятор) задаётся системой дифференциальных уравнений в частных производных

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= a + x^2 y - (b+1)x + D_x \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= bx - x^2 y + D_y \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}, \end{aligned} \tag{20.4}$$

где x, y, a, b — концентрации реагирующих веществ, D_x, D_y — коэффициенты диффузии.

Реакции протекают

а) в проточном реакторе; б) в объеме при интенсивном перемешивании; в) в объёме без перемешивания; г) в длинной тонкой трубе без перемешивания; д) в чашке Петри.

41. Тримолекулярная модель (брюсселятор) задаётся системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a + x^2 y - (b+1)x, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2 y, \end{aligned} \tag{20.5}$$

где x, y, a, b — концентрации реагирующих веществ.

Реакции протекают

а) в проточном реакторе; б) в объёме при интенсивном перемешивании; в) в объёме без перемешивания; г) в длинной тонкой трубе без перемешивания; д) в чашке Петри.

42. Тримолекулярная модель (брюсселятор) задаётся системой обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a + x^2 y - (b+1)x, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2 y, \end{aligned} \tag{20.6}$$

где x, y, a, b — концентрации реагирующих веществ.

Координаты особой точки

а) $(0,0)$; б) $(a, b/a)$; в) $(0, a)$; г) $(-a/b, a)$; д) особых точек нет.

43. Тримолекулярная модель (брюсселятор) задаётся системой обыкновенных дифференциальных уравнений

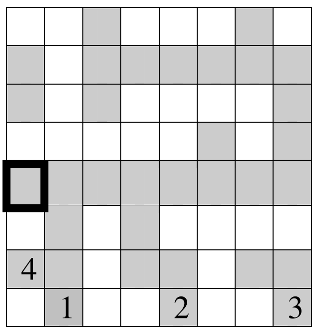
$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a + x^2 y - (b+1)x, \\ \frac{dy}{dt} &= bx - x^2 y, \end{aligned} \tag{20.7}$$

где x, y, a, b — концентрации реагирующих веществ.

Бифуркация

а) происходит при $a^2 + 1 = b$; б) происходит при $a^2 = b$; в) происходит при $a < 0$; г) происходит при $a^2 + b + a = 1$; д) никогда не происходит.

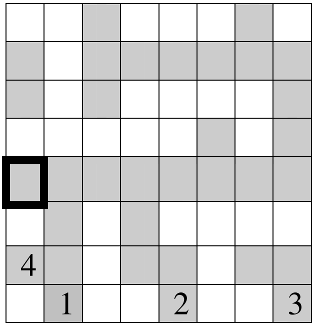
44. Алгоритм Хошена–Копельмана начал маркировку кластеров с левого нижнего угла представленной на рисунке матрицы. Граничные условия открытые (свободные).



После завершения работы алгоритма выделенная ячейка получит правильную кластерную метку

а) 0; б) 12; в) 1; г) 7; д) 4.

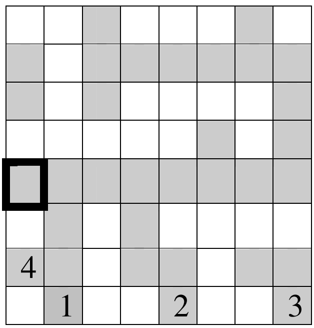
45. Алгоритм Хошена–Копельмана начал маркировку кластеров с левого нижнего угла представленной на рисунке матрицы. Граничные условия открытые (свободные).



После окончания работы алгоритма кластер с правильной кластерной меткой 3 имеет размер

а) 1; б) 2; в) 3; г) 27; д) 28.

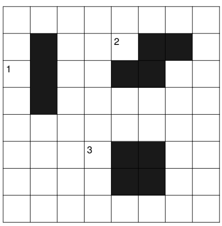
46. Алгоритм Хошена–Копельмана начал маркировку кластеров с левого нижнего угла представленной на рисунке матрицы. Граничные условия открытые (свободные).



На следующем шаге алгоритм присвоит ячейке кластерную метку

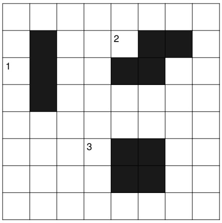
а) 1; б) 5; в) 3; г) 4; д) 0.

47. В клеточном автомате Дж. Конвея «Жизнь» живые клетки обозначены тёмным цветом.



Стабильными являются конфигурации, помеченные номерами а) 1;   б) 2;   в) 3;   г) в этом клеточном автомате стабильные конфигурации в принципе не возможны;   д) ни одна из изображенных конфигураций не является стабильной.

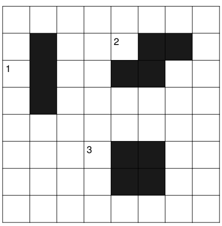
48. В клеточном автомате Дж. Конвея «Жизнь» живые клетки обозначены тёмным цветом.



За конечное число шагов стабилизируются конфигурации, помеченные номерами

а) 1;   б) 2;   в) 3;   г) в этом клеточном автомате стабильные конфигурации в принципе не возможны;   д) ни одна из изображенных конфигураций не является стабильной.

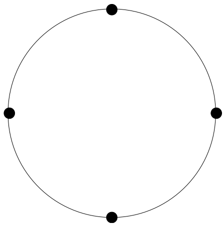
49. В клеточном автомате Дж. Конвея «Жизнь» живые клетки обозначены тёмным цветом.



Периодически изменяющимися являются конфигурации, помеченные номерами

а) 1;   б) 2;   в) 3;   г) в этом клеточном автомате периодически изменяющиеся конфигурации в принципе не возможны;   д) ни одна из изображенных конфигураций не является периодически изменяющейся.

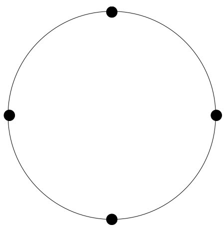
50. На рисунке представлена одномерная цепочка одинаковых магнитных атомов. Граничные условия периодические. Внешнее магнитное поле отсутствует. Коэффициент обменного взаимодействия между атомами $J = 1$.



Полная энергия такой системы в модели Изинга при $T = 0$ равна

а) 1; б) 2; в) -1; г) -2; д) 0.

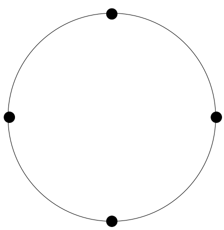
51. На рисунке представлена одномерная цепочка одинаковых магнитных атомов. Граничные условия периодические. Внешнее магнитное поле отсутствует. Коэффициент обменного взаимодействия между атомами $J = -1$.



Полная энергия такой системы в модели Изинга при $T = 0$ равна

а) 1; б) 2; в) -1; г) -2; д) 0.

52. На рисунке представлена одномерная цепочка одинаковых магнитных атомов. Граничные условия периодические. Внешнее магнитное поле отсутствует. Коэффициент обменного взаимодействия между атомами $J = 1$.



Намагниченность такой системы в модели Изинга при $T = 0$ равна

а) 1; б) 2; в) 3; г) 4; д) 0.

Построение фазовых портретов динамических систем

Порядок построения фазового портрета линейной динамической системы

Для построения фазового портрета динамической системы

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax + by, \\ \dfrac{dy}{dt} = cx + dy \end{cases} \tag{20.8}$$

необходимо выполнить следующие действия.

1. Выписать матрицу коэффициентов системы (20.8)

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

   найти ее след $\operatorname{tr}\mathrm{M}$ и определитель $\det\mathrm{M}$.

2. Используя рис. 20.2, определить тип особой точки.
3. Найти уравнения особых направлений $\frac{dx}{dt} = 0$ и $\frac{dy}{dt} = 0$.

$$y = -\frac{a}{b}x,$$

$$y = -\frac{c}{d}x.$$

4. Если особая точка является седлом или узлом, то найти асимптоты, используя подстановку $y = kx$.
5. Определить направление фазовых траекторий.

Примеры построения фазовых портретов простейших динамических систем

Пример 1.

Используя приведённую выше схему, построим фазовый портрет динамической системы

$$y' = \frac{2x + y}{3x + 4y}.$$

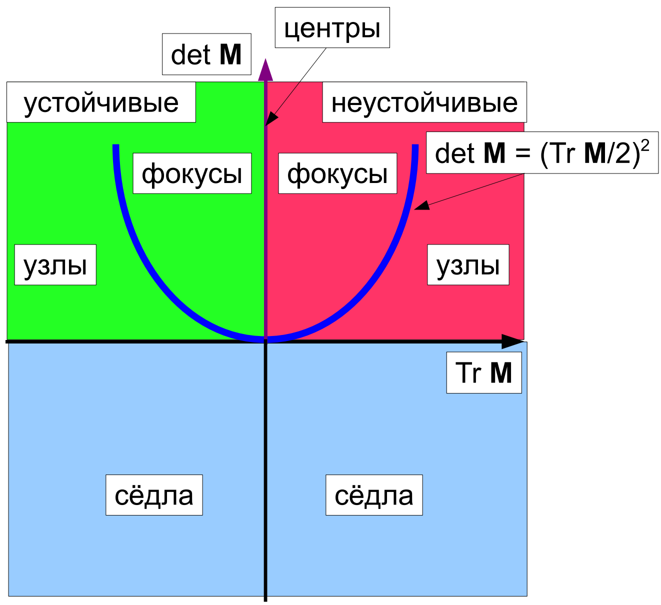


Рис. 20.2. Зависимость типа особой точки от определителя и следа матрицы коэффициентов динамической системы

Запишем эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = 3x + 4y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x + y. \end{cases}$$

1. Матрица коэффициентов системы

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Её определитель $\det \mathrm{M} = -5$, а след $\operatorname{tr} \mathrm{M} = 4$.

2. Поскольку определитель отрицателен, особая точка является седлом.

3. Уравнения особых направлений

$$y = -\frac{3}{4}x \text{ и } y = -2x.$$

   Первую прямую фазовые траектории пересекают в вертикальном направлении, а вторую — в горизонтальном.

4. Находим уравнения асимптот

$$k = \frac{2x + kx}{3x + 4kx} = \frac{2 + k}{3 + 4k},$$

   следовательно, $4k^2 + 2k - 2 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим, что $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{1}{2}$, то есть $y = -x$ и $y = \frac{1}{2}x$.

5. Определяем направление фазовых траекторий. Для этого возьмём какую-нибудь точку на асимптоте, например $(1, -1)$, и вычислим значение y' в этой точке

$$y' = \frac{2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1)}{3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1)} = -1.$$

   Следовательно, y уменьшается с ростом x, то есть фазовые траектории направлены к точке $(0, 0)$.

Теперь можно построить фазовый портрет системы (рис. 20.3).

Пример 2.

Рассмотрим динамическую систему, задаваемую уравнением

$$y' = \frac{2x - y}{x - y}.$$

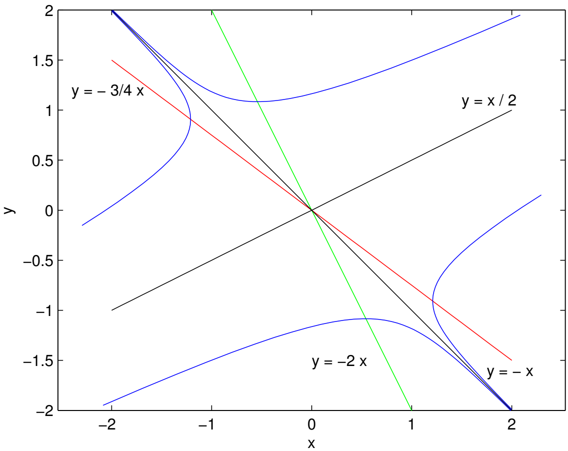


Рис. 20.3. Седло

Запишем эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x - y, \\ \dfrac{dy}{dt} = 2x - y. \end{cases}$$

1. Матрица коэффициентов системы

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

   Её определитель $\det \mathrm{M} = 1$, а след $\operatorname{tr} \mathrm{M} = 0$.

2. Поскольку определитель положителен, а след равен нулю, то особая точка является центром.

3. Уравнения особых направлений $y = x$ и $y = 2x$. Первую прямую фазовые траектории пересекают в вертикальном направлении, а вторую — в горизонтальном.

4. Определяем направление фазовых траекторий. Для этого возьмём какую-нибудь точку, например $(1, 0)$, и вычислим значение y' в этой точке

$$y' = \frac{2 - 0}{1 - 0} = 2.$$

   Следовательно, y увеличивается с ростом x.

Теперь можно построить фазовый портрет системы (рис. 20.4).

Пример 3.

Рассмотрим динамическую систему, задаваемую уравнением

$$y' = \frac{x - 4y}{2y - 3x}.$$

Запишем эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -3x + 2y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x - 4y. \end{cases}$$

1. Матрица коэффициентов системы

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}.$$

   Её определитель $\det \mathrm{M} = 10$, а след $\operatorname{tr} \mathrm{M} = -7$.

2. Поскольку определитель положителен, а след отрицателен, и выполняется соотношение $\det \mathrm{M} < (\operatorname{tr} \mathrm{M}/2)^2$, то особая точка является устойчивым узлом.

3. Уравнения особых направлений

$$y = \frac{3}{2}x \text{ и } y = \frac{1}{4}x.$$

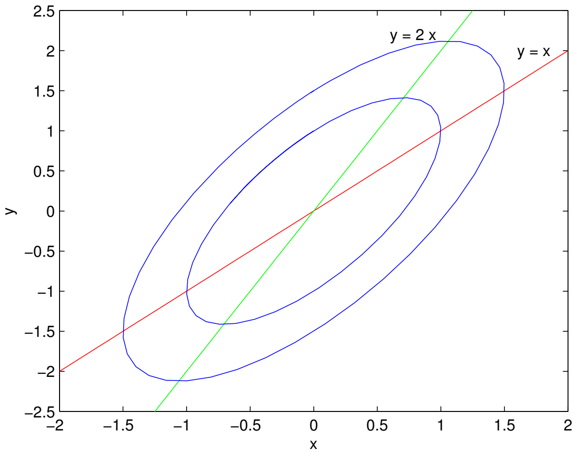


Рис. 20.4. Центр

Первую прямую фазовые траектории пересекают в вертикальном направлении, а вторую — в горизонтальном.

4. Находим уравнения асимптот

$$k = \frac{x - 4kx}{2kx - 3x} = \frac{1 - 4k}{2k - 3},$$

следовательно, $2k^2 + k - 1 = 0$. Решая полученное квадратное уравнение, находим, что $k_1 = -1$, $k_2 = \frac{1}{2}$, то есть $y = -x$ и $y = \frac{1}{2}x$.

5. Поскольку особая точка является устойчивым узлом, то фазовые траектории направлены к точке $(0, 0)$.

Теперь можно построить фазовый портрет системы (рис. 20.5).

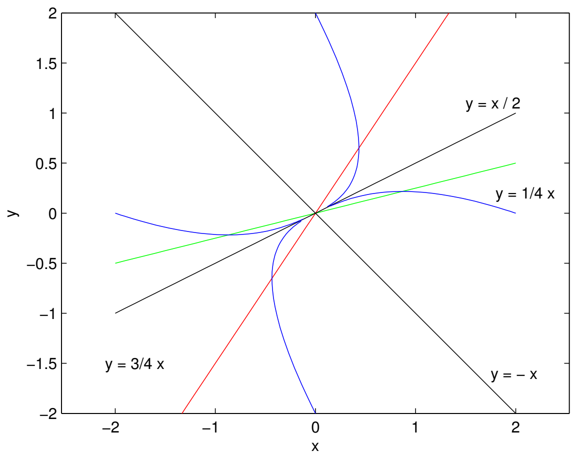


Рис. 20.5. Устойчивый узел

Пример 4.
Рассмотрим динамическую систему, задаваемую уравнением

$$y' = \frac{y - 2x}{y}.$$

Запишем эквивалентную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = y, \\ \dfrac{dy}{dt} = -2x + y. \end{cases}$$

1. Матрица коэффициентов системы

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

   Её определитель $\det M = 2$, а след $\operatorname{tr} M = 1$.

2. Поскольку определитель и след положительны, и выполняется соотношение $\det M > (\operatorname{tr} M/2)^2$, то особая точка является неустойчивым фокусом.

3. Уравнения особых направлений $y = 0$ и $y = 2x$. Первую прямую фазовые траектории пересекают в вертикальном направлении, а вторую — в горизонтальном.

4. Поскольку особая точка является неустойчивым фокусом, то фазовые траектории направлены от точки $(0, 0)$. Однако мы не знаем ещё одной детали, в каком направлении происходит раскручивание фазовой траектории: по или против часовой стрелки? Вычислим вектор скорости $(\frac{dx}{dt}; \frac{dx}{dt})$, например, в точке $(1; 0)$: $(0; -2)$. Таким образом, вектор скорости направлен вниз, и, следовательно, спираль раскручивается по часовой стрелке, т.к. вектор скорости в любой точке направлен по касательной к траектории.

Теперь можно построить фазовый портрет системы (рис. 20.6).

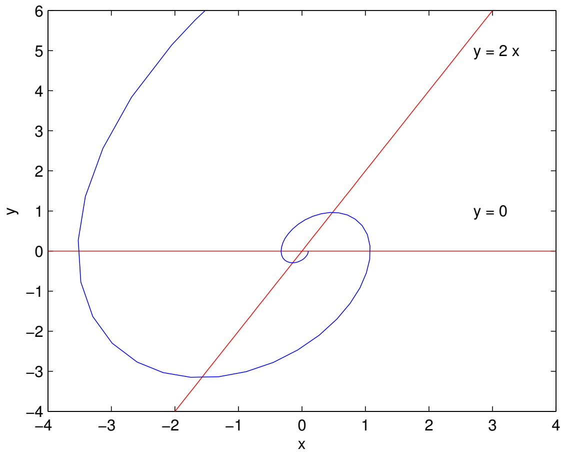


Рис. 20.6. Неустойчивый фокус

Пример исследования простой нелинейной динамической системы

Рассмотрим модификацию модели хищник–жертва, в которой даже в отсутствии хищников рост численности популяции жертв ограничен внутривидовой конкуренцией. Система уравнений, описывающих динамику популяций, имеет вид

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x - \beta xy - \varepsilon x^2, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y + \delta xy. \end{cases}$$

Найдем особые точки системы, переписав ее в виде

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y - \varepsilon x), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x). \end{cases}$$

Заметим, что фазовые траектории пересекают прямую $x = \frac{\gamma}{\delta}$ в горизонтальном направлении, т.к. на этой прямой $\frac{dy}{dt} = 0$. Прямую $y = \frac{\alpha}{\beta} - \frac{\varepsilon}{\beta}x$ фазовые траектории пересекают в вертикальном направлении, т.к. на этой прямой $\frac{dx}{dt} = 0$.

Очевидно, что система имеет три особые точки:

1. $x = 0$, $y = 0$.
2. $x = \frac{\alpha}{\varepsilon}$, $y = 0$.
3. $x = \frac{\gamma}{\delta}$, $y = \frac{\alpha\delta - \varepsilon\gamma}{\beta\delta}$.

Подробно разберем случай, когда $\alpha\delta - \varepsilon\gamma > 0$. Случай $\alpha\delta - \varepsilon\gamma < 0$ оставим для самостоятельного рассмотрения.

1. Рассмотрим поведение системы вблизи первой особой точки. Пренебрегая величинами второго порядка малости xy и x^2, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \alpha x, \\ \dfrac{dy}{dt} = -\gamma y. \end{cases} \tag{20.9}$$

Матрица коэффициентов правой части этой системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & -\gamma \end{pmatrix}. \tag{20.10}$$

Ее определитель $\det M = -\alpha\gamma < 0$, следовательно, первая особая точка — седло.

2. Теперь рассмотрим поведение системы вблизи второй особой точки. Пусть $x = \tilde{x} + \frac{\alpha}{\varepsilon}$, где $\tilde{x}$ — малая величина. Тогда система уравнений вблизи особой точки примет вид

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \left(\tilde{x} + \dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)\left(\alpha - \beta y - \varepsilon\left(\tilde{x} + \dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right), \\ \dfrac{dy}{dt} = -y\left(\gamma - \delta\left(\tilde{x} + \dfrac{\alpha}{\varepsilon}\right)\right). \end{cases}$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, имеем

$$\begin{cases} \dfrac{d\tilde{x}}{dt} = -\alpha\tilde{x} - \dfrac{\alpha\beta}{\varepsilon}y, \\ \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{\alpha\delta - \gamma\varepsilon}{\varepsilon}y. \end{cases}$$

Матрица коэффициентов правой части этой системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -\alpha & -\frac{\alpha\beta}{\varepsilon} \\ 0 & \frac{\alpha\delta-\gamma\varepsilon}{\varepsilon} \end{pmatrix}. \tag{20.11}$$

Ее определитель $\det M = -\alpha\frac{\alpha\delta-\gamma\varepsilon}{\varepsilon} < 0$, поскольку мы рассматриваем случай, когда $\alpha\delta - \varepsilon\gamma > 0$. Следовательно, вторая особая точка — тоже седло. Вблизи этой особой точки фазовые траектории являются гиперболами. Найдем их асимптоты. Для этого перепишем систему уравнений в виде одного уравнения

$$\frac{dy}{d\tilde{x}} = \frac{(\alpha\delta - \gamma\varepsilon)y}{-\alpha\varepsilon\tilde{x} - \alpha\beta y}$$

и подставим в него $y = k\tilde{x}$

$$k = \frac{(\alpha\delta - \gamma\varepsilon)k\tilde{x}}{-\alpha\varepsilon\tilde{x} - \alpha\beta k\tilde{x}} = \frac{(\alpha\delta - \gamma\varepsilon)k}{-\alpha\varepsilon - \alpha\beta k}.$$

Откуда $k(-\alpha\varepsilon - \alpha\beta k) - (\alpha\delta - \gamma\varepsilon)) = 0$, т.е. одна из асимптот $y = 0$, а вторая — $y = \frac{\gamma\epsilon - \alpha\delta - \alpha\varepsilon}{\alpha\beta}x$.

3. Наконец рассмотрим поведение системы вблизи третьей особой точки. Пусть $x = \frac{\gamma}{\delta} + \tilde{x}$, $y = \frac{\alpha\delta-\gamma\varepsilon}{\beta\delta} + \tilde{y}$, где $\tilde{x}$, $\tilde{y}$ — малые величины. Тогда система дифференциальных уравнений запишется в

виде

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \left(\dfrac{\gamma}{\delta} + \tilde{x}\right)\left(\alpha - \beta\left(\dfrac{\alpha\delta - \gamma\varepsilon}{\beta\delta} + \tilde{y}\right) - \varepsilon\left(\dfrac{\gamma}{\delta} + \tilde{x}\right)\right),\\
\dfrac{d\tilde{y}}{dt} = -\left(\dfrac{\alpha\delta - \gamma\varepsilon}{\beta\delta} + \tilde{y}\right)\left(\gamma - \delta\left(\dfrac{\gamma}{\delta} + \tilde{x}\right)\right).
\end{cases}
$$

Пренебрегая слагаемыми второго порядка малости, имеем

$$
\begin{cases}
\dfrac{d\tilde{x}}{dt} = -\dfrac{\gamma\varepsilon}{\delta}\tilde{x} - \dfrac{\beta\gamma}{\delta}\tilde{y},\\
\dfrac{d\tilde{y}}{dt} = \dfrac{\alpha\delta - \gamma\varepsilon}{\beta}\tilde{x}.
\end{cases}
$$

Матрица коэффициентов правой части этой системы дифференциальных уравнений имеет вид

$$
\mathrm{M} = \begin{pmatrix} -\frac{\gamma\varepsilon}{\delta} & -\frac{\beta\gamma}{\delta} \\ \frac{\alpha\delta - \gamma\varepsilon}{\beta} & 0 \end{pmatrix}. \tag{20.12}
$$

Определитель матрицы $\det \mathrm{M} = \frac{\gamma}{\delta}(\alpha\delta - \gamma\varepsilon) > 0$, след матрицы $\operatorname{tr} \mathrm{M} = -\frac{\gamma\varepsilon}{\delta} < 0$, следовательно, особая точка — устойчивый фокус или узел. Тип особой точки (фокус или узел) определяется знаком выражения

$$
\left(\frac{\operatorname{tr}\mathbf{M}}{2}\right)^2 - \det\mathbf{M} = \left(-\frac{\gamma\varepsilon}{2\delta}\right)^2 - \frac{\gamma}{\delta}(\alpha\delta - \gamma\varepsilon) = -\alpha\gamma - \frac{3\gamma\varepsilon}{4\delta}.
$$

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1

Найти особые точки, определить их тип и построить фазовый портрет системы

$$
\begin{cases}
\dfrac{dx}{dt} = x(\alpha - \beta y - \varepsilon x),\\
\dfrac{dy}{dt} = -y(\gamma - \delta x),
\end{cases}
$$

если $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$, $\varepsilon > 0$, $\gamma > 0$, $\delta > 0$ и $\alpha\delta - \varepsilon\gamma < 0$.

Задача 2

Определить тип особых точек

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = 0,$

2. $N_1 = \dfrac{r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}, \quad N_2 = \dfrac{r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2},$

и построить вблизи них фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

если $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 > 0, \quad r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1 > 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2 > 0.$$

Задача 3

Определить тип особых точек

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = r_2/\beta_2,$

2. $N_1 = r_1/\beta_1, \quad N_2 = 0,$

и построить вблизи них фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

если $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 > 0, \quad r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1 > 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2 > 0.$$

Задача 4

Определить тип особых точек

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = r_2/\beta_2,$

2. $N_1 = r_1/\beta_1, \quad N_2 = 0$

и построить вблизи них фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

если $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 < 0, \quad r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1 < 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2 < 0.$$

Задача 5

Определить тип особых точек

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = 0,$

2. $N_1 = \dfrac{r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}, \quad N_2 = \dfrac{r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2}{\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2}$

и построить вблизи них фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

если $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и

$$\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\beta_2 < 0, \quad r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1 < 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2 < 0.$$

Задача 6

Определить тип особых точек

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = r_2/\beta_2,$

2. $N_1 = r_1/\beta_1, \quad N_2 = 0$

и построить вблизи них фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

если $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и

$$r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1 < 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2 > 0.$$

Задача 7

Определить тип особых точек

1. $N_1 = 0, \quad N_2 = r_2/\beta_2,$

2. $N_1 = r_1/\beta_1, \quad N_2 = 0$

и построить вблизи них фазовые траектории системы

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = N_1(r_1 - \beta_1 N_1 - \alpha_2 N_2), \\ \dot{N}_2 = N_2(r_2 - \beta_2 N_2 - \alpha_1 N_1), \end{cases}$$

если $N_1 \geqslant 0$, $N_2 \geqslant 0$, $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$, $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ и

$$r_2\alpha_2 - \beta_2 r_1 > 0, \quad r_1\alpha_1 - \beta_1 r_2 < 0.$$

Литература

1. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.

2. Анищенко В.С. Знакомство с нелинейной динамикой. М.: Издательство УРСС, 2008. 224 с.

3. Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Едиториал УРСС, 2004. 128 с. (или предыдущее издание Арнольд В.И. Теория катастроф. М.: Наука, 1990. 128 с.)

4. Астафьев Г.Б., Короновский А.А., Храмов А.Е. Клеточные автоматы: Учебно-методическое пособие. Саратов: Изд. ГосУНЦ «Колледж», 2003. 24 с.

5. Базыкин А.Д. Биофизика взаимодействующих популяций. М.: Наука, 1985.

6. Безручко Б.П. Нелинейные маятники и их модели // Соросовский образовательный журнал, 2000. № 9.

7. Винер Н., Розенблют А. Проведение импульсов в сердечной мышце. Математическая формулировка проблемы проведения импульсов в сети связанных возбудимых элементов, в частности в сердечной мышце // Кибернетический сборник. Вып. 3. М.: Изд. иностр. лит. 1961. С. 7–56.

8. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976.286 с.

9. Гарднер М. Крестики-нолики. М.: Мир, 1988. С. 287–343.

10. Дьюдни А.К. Акулы и рыбы ведут экологическую войну на тороидальной планете АКВА-ТОР // В мире науки (Scientific American). № 2. 1985. С. 79–84.

11. Займан Дж. Модели беспорядка. М.: Мир, 1982.

12. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю.
`http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=32`.

13. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю.
`http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=35`.

14. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю. http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=36.

15. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю.
http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=51.

16. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю.
http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=53.

17. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю.
http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=83.

18. Информационная система «Динамические модели в биологии». Реестр моделей [Электронный ресурс]: Руководитель проекта Ризниченко Г.Ю.
http://www.dmb.biophys.msu.ru/registry?article=88.

19. Колмановский В.Б. Уравнения с последействием и математическое моделирование // Соросовский образовательный журнал, 1996, № 4. с. 122–127.
http://www.pereplet.ru/nauka/Soros/pdf/9604_122

20. Кузнецов С.П. Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд. Физико-математической литературы, 2001. 296 с.

21. Лоскутов А.Ю., Михайлов А.С. Введение в синергетику. М.: Наука, 1990.

22. Марри Дж. Нелинейные дифференциальные уравнения в биологии. Лекции о моделях: Пер. с англ. — М.: Мир, 1983. (Раздел 5.3)

23. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и её приложения. М.: Мир, 1980. (Глава 1, § 2, с. 21–24; Глава 5, с. 103–120)

24. Пригожин И. Р. От существующего к возникающему. М.: Едиториал УРСС, 2002.

25. Рабинович М.И., Трубецков Д.И. Введение в теорию колебаний и волн. М. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2000. 560 с.

26. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Лекция 7. Мультистационарные системы. [Электронный ресурс]: http://www.library.biophys.msu.ru/LectMB/lect07.htm.

27. Ризниченко Г.Ю. Лекции по математическим моделям в биологии. Часть 1. Москва — Ижевск: РХД, 2002.

28. Ризниченко Г.Ю., Рубин А.Б. Математические модели биологических продукционных процессов. М.: Изд. МГУ, 1993.

29. Романовский Ю.М., Степанова Н.В., Чернавский Д.С. Математическое моделирование в биофизике: Введение в теоретическую биофизику — М.: РХД, 2004. — 472 с. — ISBN 5-93972-359-4. (Глава 5. Модели клеточного переключения.)

30. Рубин А.Б. Биофизика в 2-х т. М.: Наука, 1999.

31. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование. Вводный курс. Учебное пособие. 4-е изд., испр. М.: Едиториал УРСС, 2004.

32. Тарасевич Ю.Ю. Перколяция: теория, приложения, алгоритмы. М.: Едиториал УРСС, 2002. 112 с.

33. Тоффоли Т., Марголус Н. Машины клеточных автоматов, М.: Мир, 1991.

34. Трубецков Д.И., Мчедлова Е.С., Красичников Л.В. Введение в теорию самоорганизации открытых систем — 2-е изд. — М.: Физматлит, 2005. — 212 с. (Глава 4) http://www.sgtnd.narod.ru/publ/rus/tmk.htm

35. Федер Е. Фракталы.М.: Мир, 1991.

36. Фейгенбаум М. Универсальность в поведении нелинейных систем. // Успехи физ. наук, 1983. Т.141, вып. 2, С. 343–374.

37. Шустер Г. Детерминированный хаос. Введение. М.: Мир, 1988.

38. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. М.: Мир, 1986.

39. Эфрос А.Л. Физика и геометрия беспорядка. М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат. лит-ры, 1982.

Юрий Юрьевич Тарасевич,
Ирина Александровна Бубенщикова

Математические модели в естествознании и методы их исследования

Компьютерный практикум

Учебно-методическое пособие

Издатель: Сорокин Роман Васильевич
414040, Астрахань, пл. К. Маркса, 33, 5-й этаж

Подписано в печать 04.08.2015 г. Формат 60×90/16
Усл. печ. л. 4,5
Тираж 100 экз.

Отпечатано в Астраханской цифровой типографии
(ИП Сорокин Роман Васильевич)
414040, Астрахань, пл. К. Маркса, 33, 5-й этаж
Тел./факс (8512) 54-00-11, e-mail: RomanSorokin@list.ru